STATISTICA PSICOMETRICA a.a. 2004/2005

Corsi di laurea

Scienze e tecniche neuropsicologiche

Modulo 3

Statistica Inferenziale

- Probabilità
- Distribuzioni di probabilità
- Distribuzioni campionarie
- Stima intervallare
- Verifica delle ipotesi

Cenni di teoria della probabilità

Matematica

Probabilità come concetto primitivo *(definizione assiomatica)*

Teoria frequentista

Legge dei grandi numeri

$$P(E_i) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N}$$

Teoria probabilità simmetrica

Rapporto tra casi favorevoli e tutti gli esiti possibili

$$P(E_i) = \frac{1}{K}$$

Cenni di teoria della probabilità

Assiomi e teoremi fondamentali

Insieme degli eventi elementari

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$$

40 carte di un mazzo

Insieme degli eventi complessi

$$B_\Omega = \text{Insieme delle parti}$$

Le figure, un seme

$$P(E_i) \quad \text{Probabilità di un singolo evento}$$

Estrazione del 3 di coppe

Estrazione di un cavallo

Estrazione di una carta > 5

Cenni di teoria della probabilità

Assiomi e teoremi fondamentali

$$0 \le P(E_i) \le 1$$

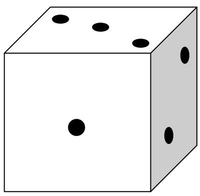
$$P(\Omega) = 1$$

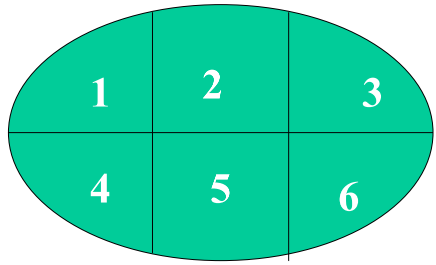
$$P(E_i \cup E_J) = P(E_i) + P(E_J) - P(E_i \cap E_J)$$

Cenni di teoria della probabilità

Ogni evento ha una probabilità compresa tra 0 ed 1.

La somma delle probabilità di tutti gli eventi semplici è =1





$$P(E_i) = \frac{1}{K}$$

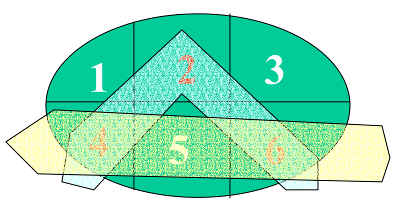
P(1) = 1/6 P(2) = 1/6 P(3)= 1/6

P(4) = 1/6 P(5) = 1/6 P(6)= 1/6

P(1) + P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) =6/6 =1

Cenni di teoria della probabilità

Probabilità di un evento composto è data dalla somma delle probabilità semplici meno l'intersezione tra gli eventi semplici



Probabilità uscita di un numero pari o di un numero maggiore di 3

Probabilità numero pari = uscita del 2 uscita del 4 uscita del 6 =3/6

Probabilità numero >3 = uscita del 4 uscita del 5 uscita del 6 =3/6

Intersezione = uscita del 4 uscita del 6 =2/6

3/6 + 3/6 – 2/6 = 4/6

Cenni di teoria della probabilità

Spazio Probabilistico

Si definisce spazio probabilistico la terna formata da tre elementi:

Ω = Insieme degli eventi elementari

B_{Ω} = Insieme delle parti

P = Probabilità

Cenni di teoria della probabilità

Spazio Probabilistico

Esempio: Spazio probabilistico di una moneta

$$\Omega = \{T, C\}$$

$$B_{\Omega} = \{(\varnothing), (T), (C), (TC)\}$$

$$P = \{0, P(T), P(C), P(TC)\}$$

Cenni di teoria della probabilità

Probabilità condizionata, indipendenza stocastica

Evento condizionato $$P(E_1 \mid E_2) \neq P(E_1)$$

La probabilità di E_1 stante E_2 è diversa dalla probabilità di E_1

Ad esempio, avendo un'urna con due palline bianche e due nere, la probabilità di estrarre una pallina bianca alla prima estrazione è pari ad uno su quattro (.25), mentre la probabilità di estrarla alla seconda estrazione, dopo che nella prima è stata estratta una pallina nera è pari a uno su tre (.33). Quindi il primo evento (uscita di una pallina nera alla prima estrazione) ha modificato la probabilità dell'evento.

Indipendenza stocastica $$P(E_1 \mid E_2) = P(E_1)$$

La probabilità di E_1 stante E_2 è uguale alla probabilità di E_1

Se nell'esempio precedente, dopo l'estrazione della pallina nera, questa venisse reintrodotta nell'urna, la probabilità di estrarre una pallina bianca alla seconda estrazione rimarrebbe uguale a .25

Cenni di teoria della probabilità

Probabilità composta

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \mid E_2) \cdot P(E_2)$$

La probabilità che accada la sequenza di eventi E_2 - E_1 è data dalla probabilità che accada E_2 moltiplicata per la probabilità che accada E_1 stante il fatto che è accaduto E_2 .

La probabilità di estrarre una pallina nera e poi una bianca è data dalla probabilità del primo evento (0.25) per la probabilità del secondo (0.33) , e cioè 0,08.

Se gli eventi sono stocasticamente indipendenti nella formula precedente si dovrà sostituire alla probabilità condizionata di E_1 quella semplice

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Statistica inferenziale

Variabile aleatoria

Variabile generata da un esperimento di cui non siamo in grado di prevedere l'esito con certezza.

Variabili aleatorie discrete (n° finito di elementi /infiniti numerabili)

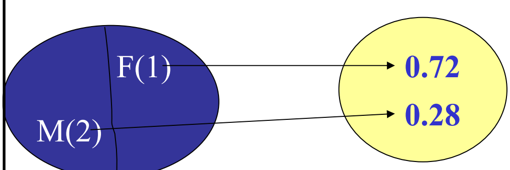
Variabili aleatorie continue (n° infinito non numerabile di elementi)

Statistica inferenziale

Variabile aleatoria

Variabile generata da un esperimento di cui non siamo in grado di prevedere l'esito con certezza.

Variabili aleatorie discrete ***Variabili aleatorie continue***



[1, 0.72]

[2, 0.28]

0,28 e 0,72 rappresentano le frequenze relative delle due modalità. L'insieme delle coppie (modalità-frequenza rappresentano una variabile statistica. Se al posto delle frequenze relative avessimo probabilità avremmo una variabile aleatoria

Statistica inferenziale

Variabile aleatoria unidimensionale discreta

Sia dato uno spazio di eventi elementari omega

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n\}$$

Ogni evento elementare è ritenuto equiprobabile

B_Ω *Insieme delle parti Insieme degli eventi E derivabili dagli eventi semplici*

P *funzione che assegna a ciascuno Insieme degli eventi una probabilità*

Se ad ognuno egli eventi E è assegnato un numero reale $X(E_i)=x_i$, chiamiamo v.a. discreta unidimensionale l'insieme delle coppie X_i, p_i

Statistica inferenziale

Variabile aleatoria unidimensionale discreta

Esempio lancio di un dado

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \omega_5, \omega_6\}$$

X= 1 2 3 4 5 6

P(1) P(2) P(3) P(4) P(5) P(6)

Ω

Ci sono sei eventi possibili (le sei facce del dado)

X

A ciascun evento (faccia) associamo un codice numerico (supporto della v.a.)

P(x)

A ciascun codice viene assegnata una probabilità che in tutti i casi vale 1/6

Statistica inferenziale

Variabile aleatoria unidimensionale discreta

Esempio lancio di un dado- Evento uscita di un numero pari

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \omega_5, \omega_6\}$$

0 (uscita di un numero dispari)

1 (uscita di un numero pari)

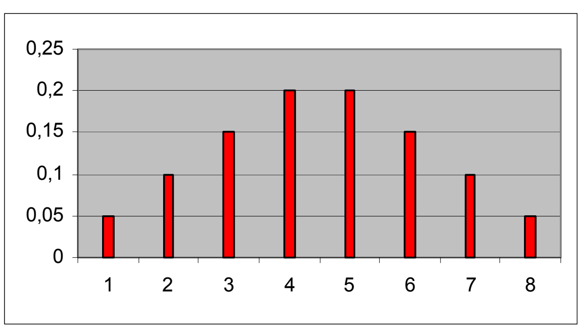
P(X=0)= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2

P(X=1)= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2

Variabili aleatorie

Distribuzione di una variabile aleatoria

Distribuzione di una variabile aleatoria discreta

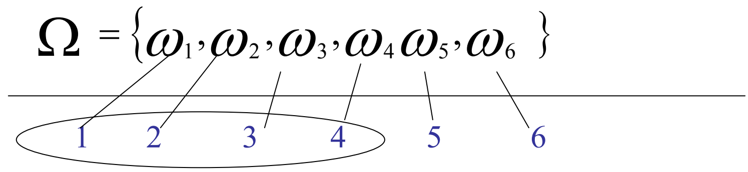


Statistica inferenziale

Variabile aleatoria unidimensionale discreta

Funzione di ripartizione

$$\Phi(X) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$



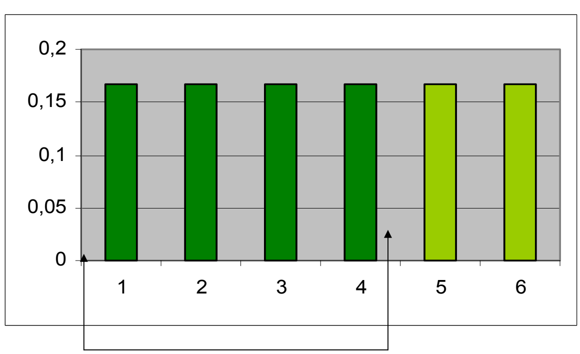
Probabilità di ottenere un valore inferiore a 5 lanciando un dado

P(X<5)= 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6 =2/3

Variabili aleatorie

Distribuzione di una variabile aleatoria

Distribuzione di una variabile aleatoria discreta



P(X<5)

Statistica inferenziale

Variabile aleatoria unidimensionale continua

Una variabile aleatoria si dice continua se gli elementi che formano Ω sono infiniti non numerabili

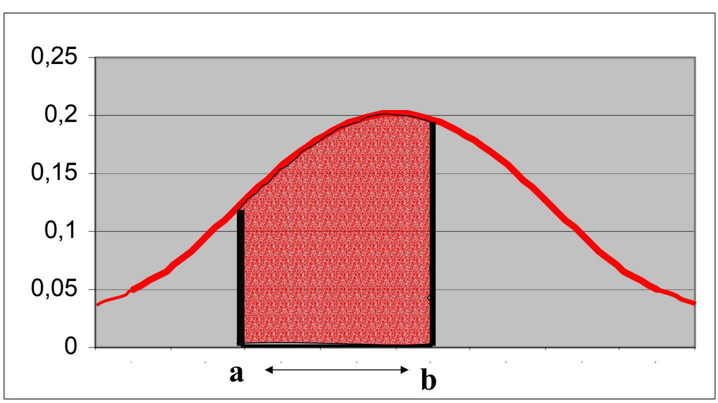
Una v.a. continua può assumere tutti i valori reali in un intervallo dx *a cui risulta associata una funzione di probabilità $\varphi(X)$ detta* ***funzione di densità di probabilità***

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)dx$$

Variabili aleatorie

Distribuzione di una variabile aleatoria

Distribuzione di una variabile aleatoria continua



Variabili aleatorie

Valori attesi di una variabile aleatoria

Come per le variabili statistiche, anche per le variabili aleatorie è possibile definire indici di posizione, di simmetria, di variabilità ….

μ = **Valore atteso o valor medio**

σ^2 = **varianza**

Variabili aleatorie

Valori attesi di una variabile aleatoria

Valore atteso

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i * p(x_i)$$ **V.a. Discreta**

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$ **V.a. Continua**

Variabili aleatorie

Valori attesi di una variabile aleatoria

Varianza

V.a. Discreta

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = \mathrm{E}\left(X-\mu\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\left(x_i-\mu\right)^2 * p(x_i)\right)$$

V.a. Continua

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = \mathrm{E}\left(X-\mu\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\mu\right)^2 f(x)\,dx$$